Analiza wrażliwości wyników estymacji współczynnika β-CAPM – badania z wykorzystaniem rodzin rozkładów prawdopodobieństwa dopuszczających grube ogony oraz asymetrię

Mgr Anna Gomola

Katedra Empirycznych Analiz Stabilności Gospodarczej

Instytut Polityk Publicznych i Administracji

Kolegium Gospodarki i Administracji Publicznej

1. Uzasadnienie wyboru propozycji badawczej

Model CAPM (*ang. capital asset pricing model*) jest jednym z najpopularniejszych modeli używanych do określenia ryzyka portfeli aktywów finansowych. CAPM inaczej nazywany jest również modelem równowagi rynku kapitałowego. Ponadto pozwala on określić koszty kapitału. Dzięki temu jest możliwa właściwa wycena spółki dla akcjonariuszy oraz utrzymanie właściwej struktury kapitału; zob. Jagannathan, Meier (2002). Koncepcja CAPM została opracowana przez Williama Sharpa (1964), Johna Lintnera (1965) oraz Jana Mossina (1966), na podstawie teorii portfela inwestycyjnego Harrye'go Markovitza; zob. Markovitz (1959). Model CAPM zakłada liniową zależność między oczekiwaną stopą zwrotu z danego aktywu finansowego, a ryzykiem rynkowym. Wynika z tego, że premia za ryzyko (*ang. risk premia*) nie może być ściśle przypisywana poszczególnemu instrumentowi finansowemu ale jest wypadkową zależności pomiędzy jego ceną, a sytuacją na całym rynku kapitałowym; zob. Ross (1976).

Aby zależność opisana w modelu CAPM była prawdziwa muszą być spełnione określone założenia. Po pierwsze wszyscy inwestorzy dokonują wyboru na podstawie dwóch zmiennych; oczekiwanej stopy zwrotu oraz wariancji aktywu. Po drugie wszyscy inwestorzy posiadają jednakowy horyzont inwestycyjny oraz homogeniczne oczekiwania wobec stóp zwrotu z danych aktywów finansowych. Ponadto rynek kapitałowy w modelu CAPM jest rynkiem doskonałym. Oznacza to, że jest doskonale płynny, nie ma kosztów transakcyjnych, podatków i ograniczeń krótkiej sprzedaży. Należy dodać, że wszystkie aktywa są idealnie podzielne oraz odzwierciedlają od razu nowe informacje docierające na rynek. Ostatnim założeniem jest to, że inwestorzy mogą pożyczać pieniądze bez żadnych restrykcji według stopy wolnej od ryzyka; zob. Jajuga (2004); Dębski (2010). Ponadto zakłada się, że oczekiwana stopa zwrotu z aktywów finansowych jest ich historyczną średnią stopą zwrotu. Kolejnym założeniem modelu CAPM jest to, że stopy zwrotu z aktywów finansowych są opisane niezależnymi zmiennymi losowymi tworzącymi stacjonarny proces stochastyczny oraz posiadają rozkład normalny; zob. Barucci (2003).

Model CAPM dany jest następującą formułą; zob. Greene (2012):

$$\mathrm{E}(r_x) - r_f = \beta * \mathrm{E}(r_m) - r_f \quad (1)$$

gdzie $\boldsymbol{r_x}$ oznacza stopę zwrotu z badanego aktywu finansowego; $\mathbf{E}(\boldsymbol{r_x})$ oznacza oczekiwaną stopę zwrotu z badanego aktywu finansowego; $\boldsymbol{r_m}$ oznacza stopę zwrotu z portfela rynkowego; $\mathbf{E}(\boldsymbol{r_m})$ oznacza oczekiwaną stopę zwrotu z portfela rynkowego; $\boldsymbol{r_f}$ oznacza stopę zwrotu z inwestycji wolnej od ryzyka.

Kluczowym parametrem w modelu CAPM jest współczynnik β (zwany współczynnikiem *Beta* aktywu), który interpretuje się jako ryzykowność badanego aktywu w relacji do ryzykowności portfela rynkowego. Oznacza to, że jeżeli współczynnik $\beta = 1$ to oczekiwana stopa zwrotu z aktywu finansowego jest równa oczekiwanej stopie zwrotu z portfela rynkowego. Analogicznie interpretuje się sytuacje, kiedy $\beta > 1$, to oczekiwana stopa zwrotu z aktywu finansowego jest większa niż ta z portfela rynkowego. Gdy wartość współczynnika $\beta < 1$, to oczekiwana stopa zwrotu z aktywu finansowego jest mniejsza niż ta z portfela rynkowego.

Założenia modelu CAPM umożliwiają wykazanie istnienia łącznego rozkładu r_x i r_m o wartościach oczekiwanych z formuły (1) odpowiednio $\mathrm{E}(r_x)$ oraz $\mathrm{E}(r_m)$, wariancjach $Var(r_x)$ $Var(r_m)$ i kowariancji $Cov(r_x, r_m)$. Dodatkowo założenia modelu CAPM umożliwiają wyrażenie współczynnika β jako funkcję momentów drugiego rzędu (wariancji i kowariancji) łącznego rozkładu r_x i r_m:

$$\beta = \frac{Cov(r_x, r_m)}{Var(r_m)} \tag{2}$$

Wstawiając β do równania (1) otrzymujemy zależność wynikającą z modelu CAPM, która polega na funkcyjnym związaniu momentów rozkładów r_x i r_m:

$$\mathrm{E}(r_x) - r_f = \frac{Cov(r_x, r_m)}{Var(r_m)} \cdot (\mathrm{E}(r_m) - r_f) \tag{3}$$

W analizach empirycznych rozkłady, których istnienie postuluje CAPM są nieznane i podlegają estymacji. Rozważa się też model regresji CAPM następującej postaci; zob. Greene, (2012), rozdział 10:

$$r_t - r_t^f = \beta_0 + \beta_1 * \left(r_t^m - r_t^f\right) + \varepsilon_t \tag{4}$$

gdzie $\boldsymbol{r_t}$ oznacza obserwację numer *t* na stopie zwrotu z badanego aktywu; $\boldsymbol{r_t^m}$ oznacza obserwację numer *t* na stopie zwrotu z portfela rynkowego; $\boldsymbol{r_t^f}$ oznacza obserwację numer *t* na stopie zwrotu z inwestycji wolnej od ryzyka.

Estymacja β_0 i β_1 odbywa się przy pomocy Metody Największej Wiarygodności (MNW), która przy standardowych założeniach KMNRL sprowadza się do Metody Najmniejszych Kwadratów (MNK). Takie podejście jest niezasadne z empirycznego punktu widzenia. Na przykład wielu autorów wskazuje, że wartość współczynnika Beta jest niestabilna w czasie oraz różni się w zależności od przyjętej w procesie estymacji częstotliwości danych; zob. Faff, et al., (2000); Bai, et al., (2019); Habibi, et al., (2016). Owa empiryczna niezasadność klasycznego schematu regresji (4) stanowi od wielu dekad podstawową motywację do poszukiwań właściwej struktury stochastycznej, w celu prawidłowej oceny ryzykowności aktywów według modelu CAPM. Ten problem badawczy będzie przedmiotem proponowanej koncepcji pracy doktorskiej.

2. Odniesienie do szerszego kontekstu teoretycznego w oparciu o przegląd literatury

W literaturze przedmiotu przeprowadzono wiele badań w celu empirycznego potwierdzenia zależności przedstawionej w modelu CAPM, niestety pozytywna weryfikacja nadal stanowi zagadnienie otwarte; zob. Fama, French (1992); Fama, French (1998); Black (1972); Stambaugh (1982); Zhou, Yin (2003).

Pierwsze modyfikacje modelu CAPM polegały na dodaniu do równania na oczekiwaną stopę zwrotu dodatkowych zmiennych, które oprócz ryzyka systematycznego mogą wpływać na dynamikę stóp zwrotu badanego instrumentu. Bazą do tego typu rozważań był międzyokresowy model CAPM (*ang. Interportal CAPM, ICAPM*). Model ICAPM jest modyfikacją modelu CAPM, poszerzoną o zmienną opisującą konsumpcję. Inwestorzy podejmują decyzje dotyczące wielkości inwestycji oraz wielkości konsumpcji, mające wpływ na ich zamożność w całym horyzoncie życia. Oznacza to, że przyszła wartość zarówno zmiennej inwestycji jak i konsumpcji obarczona jest dużą niepewnością; zob. Merton (1973). W niniejszym modelu występuje optymalizacja międzyokresowa problemu konsumpcji oraz inwestycji. W klasycznym modelu CAPM zakłada się, że wszyscy inwestorzy mają jednakowy horyzont inwestycyjny, jednak w rzeczywistości wygląda to inaczej. Portfel posiadany przez inwestora w dowolnym momencie czasu jest tylko jednym z szeregu portfeli jakie zamierza posiadać on w przyszłości. Wszystkie portfele danego inwestora mają maksymalizować użyteczność konsumpcji w ciągu życia. Niniejszy problem rozwiązują założenia wielookresowego modelu CAPM. Nakładając pewne warunki można zminimalizować wielookresowy wybór do jednookresowej funkcji użyteczności.

W innych badaniach empirycznych zmienna ryzyka została zastąpiona zmienną konsumpcji. Decyzje konsumpcyjne oraz inwestycyjne są skorelowane ze sobą; zob. Breeden (1979). Innym ważnym zagadnieniem rozważanym w problemie empirycznej weryfikacji modelu CAPM było zdefiniowanie portfela rynkowego. Globalny portfel rynkowy powinien zawierać wszystkie aktywa inwestycyjne (również te niepłynne), na wszystkich rynkach; zob. Roll (1977). Kolejnym niemożliwym do spełnienia założeniem jest to dotyczące homogenicznych oczekiwań wobec stóp zwrotu wśród inwestorów; zob. Berk (1997). Empiryczne badania pokazały, że współczynniki *Beta* dla firm o dużej kapitalizacji są niższe niż te oszacowane przez model CAPM. Z kolei firmy o małej kapitalizacji, podczas empirycznej weryfikacji otrzymały wyższe wartości współczynnika *Beta* niż jakby sugerował to model CAPM. Pomiędzy kapitalizacją a ryzykiem systematycznym istnieje zależność możliwa do opisania przez ujemną korelację. Firmy o wysokim ryzyku mają bowiem niską kapitalizację, a firmy o niewielkim ryzyku mają dużą kapitalizację; zob. Kaplan, Peterson (1998). Ponadto kursy akcji małych firm podlegają silniejszym wahaniom a zatem w próbie występują wyższe stopy zwrotu, które nie są wyjaśnione przez model CAPM; zob. Banz (1981), Basu (1983). Ponadto badania empiryczne wykazały, że akcje posiadające wysoki stosunek dochodów do ceny (*ang. earning-price ratio*) charakteryzowały się systematycznie wyższymi stopami zwrotu niż oczekiwane stopy zwrotu, które wynikały z modelu CAPM. Oznacza to, że na ryzykowność danego aktywu wpływa dużo więcej zmiennych; nie tylko stopa zwrotu wolna od ryzyka i stopa zwrotu z portfela rynkowego, tak jak w równaniu regresji CAPM; zob. Basu (1977). Powyższe próby modyfikacji założeń modelu CAPM nie przyniosły oczekiwanych rezultatów i ostatecznie zagadnienie to porzucono w latach 80-tych XX wieku.

Założenie normalności w rozkładach empirycznych stóp zmian z finansowych szeregów czasowych jest niezasadne. Występująca powszechnie asymetria oraz grube ogony; zob. Campbell, et al., (1997) nie doczekała się dotychczas formalizacji, to znaczy trudno o teoretyczny model funkcjonowania rynków finansowych, z którego wynikałby ten efekt - powszechnie przenikający finanse. W badaniach ekonometrycznych testowanie normalności ~~jest tylko formalnością. Najczęściej~~ przeprowadza się z wykorzystaniem testu Jarque'a-Bery, który w hipotezie zerowej ma rozkład ~~normalny~~Gaussa; zob. Doman, Doman (2009). W ekonometrycznych modelach finansowych najczęściej przyjmuje się rozkład normalny dla jednookresowych stóp zwrotu oraz rozkład logarytmiczno-normalny dla jednookresowych logarytmicznych stóp zwrotu; zob. Osińska (2006).

Pionierskie prace na temat modelowania grubych ogonów z wykorzystaniem procesów typu ARCH, zapoczątkowały współczesną ekonometrię finansową; zob. Engle (1982); Bollerslev (1986). W literaturze istniały wcześniej również podejścia umożliwiające analizy grubych ogonów w finansowych szeregach czasowych, które bezpośrednio korzystały z rozkładu *t*-Studenta. Rozkład *t*-Studenta jest bardziej leptokurtyczny aniżeli rozkład normalny i stanowi od dekad narzędzie sensownego uwzględnienia obserwacji nietypowych; zob. Praetz (1972); Blattberg, Gonedes (1974). Odrzucenie założenia normalności w modelach finansowych pozwoliło otrzymać dokładniejsze wyniki estymacji parametrów modeli wyceny aktywów; zob. Zhou (1993); Fang, et al., (1990); Chamberlain (1983); Komunjer (2007). Jak też zostało dowiedzione parametry rozkładów zmiennych opisujących dynamikę szeregów czasowych mogą być różne, w różnych okresach. Na przykład w przypadku stóp zmian z indeksu SP500 rozkład warunkowy (względem całej przeszłości procesu) wykazywał własności asymetrii w latach 70-tych, zaś w okresie kryzysu z 2008 roku był bliski rozkładowi gaussowskiemu; zob. Mazur i Pipień (2018).

Rozwój narzędzi ekonometrii finansowej umożliwiał modyfikacje podejścia do szacowania współczynników *Beta* w modelu CAPM. Badania były prowadzone w dwóch głównych nurtach. Pierwszy nurt analiz zakłada warunkową heteroskedastyczność łącznego rozkładu r_x i r_m, w której współczynnik *Beta*, zgodnie z formułą (2) jest funkcją kowariancji pomiędzy r_x i r_m i wariancji r_m rozkładu warunkowego (względem całej przeszłości procesu). Empiryczne testy modelu CAPM były prowadzone w tym nurcie przez wielu badaczy z wykorzystaniem wielorównaniowego modelu GARCH; zob. Bollerlev, et al., (1998); Giovannini, Jorion (1989); De Santis, Gerard (1997). W polskiej literaturze podmiotu badania nad tym zagadnieniem prowadził Fiszeder (2009).

Drugie podejście bazuje na rozważeniu bezpośrednio niegaussowskiego rozkładu składnika losowego w równaniu regresji (4). Opisanie składnika losowego za pomocą skośnego rozkładu normalnego zostało zapoczątkowane przez Azzaliniego, który w swoich badaniach wprowadzał jego różne modyfikacje; zob. Azzalini (1985), (1986). Zastosowanie skośnego rozkładu normalnego w równaniu regresji CAPM skutkowało lepszym dopasowaniem empirycznym modelu dla giełdy amerykańskiej analizowanej w okresie 1993-1998; zob. Adcock, Shutes (2000). Użycie tego samego rozkładu dla giełdy brytyjskiej i indeksu FTSE100 w okresie 1978-1995 również dało lepsze dopasowanie, aniżeli klasyczne MNK; zob. Adcock (2004). Kolejne badania pokazały, że estymacja modelu CAPM przy odejściu od założenia normalności składników losowych, i przyjęciu asymetrycznych rozkładów umożliwia lepsze dopasowanie modelu CAPM. Na przykład ciekawe rezultaty w tym zakresie przy zastosowaniu rozkładów typu APD (ang. *Asymmetric Power Distributions*) otrzymali Baoa, et al., (2018). Zastosowanie dla składników losowych rodzin giętkich rozkładów (*ang. flexible probability density functions*) dało lepsze dopasowanie modelu CAPM aniżeli te podlegające estymacji metodą MNW przy założeniu normalności; zob. McDonald, et al., (2009). Kolejnym sposobem na ekonometryczne modelowanie nienormalności są odporne metody estymacji (*ang. robust methods of estimation*). Estymacja współczynnika Beta za pomocą metod nieparametrycznych takich jak LTS (*ang. Least Trimmed Square*) oraz estymator typu M (*ang. ML-M-estimator*), dało dokładniejsze wyniki niż oszacowane zgodnie z teorią CAPM. Estymator typu M jest szczególnym przypadkiem estymacji MNW; zob. Phuoc, et al., (2018).

Estymacja współczynnika Beta dla indeksu farmaceutycznego z amerykańskiej giełdy metodą Huber-Robust (HRM), dało lepsze dopasowanie niż tradycyjne MNK. Metodologia HRM jest mniej wrażliwa na obserwacje nietypowe i niegaussowski rozkład empiryczny danych aniżeli klasyczne metody najmniejszych kwadratów; zob. Theodossiou, Theodossiou (2014).

3. Sformułowanie celu badań oraz hipotez badawczych

Tematem planowanej rozprawy doktorskiej będzie empiryczna weryfikacja modelu CAPM dla indeksów sektorowych notowanych na dwóch wybranych rynkach kapitałowych. Właściwe oszacowanie współczynnika *Beta* pozwoli na bardziej dokładną ocenę ryzykowności danego aktywu finansowego oraz bardziej precyzyjne prognozowanie oczekiwanej stopy zwrotu.

Uwzględniając przedstawione dotychczas rozważania oraz przegląd badań empirycznych główny cel przyświecający napisaniu rozprawy doktorskiej można określić jako analizę w jakim stopniu modyfikacja założeń stochastycznych modelu regresji budowanego na potrzeby modelu CAPM (równanie (4)) wpływa na wyniki estymacji współczynnika *Beta*.

Dla realizacji tego zasadniczego celu proponuje się rozważenie następujących celów cząstkowych:

Cel 1: Modyfikacja założeń dotyczących rozkładu składnika losowego w regresji CAPM w celu dopuszczenia grubych ogonów oraz asymetrii.

Cel 2: Analiza wrażliwości estymacji współczynnika *Beta* w przypadku przyjęcia rozkładu składnika losowego w regresji CAPM, który dopuszcza grube ogony i asymetrię.

Cel 3: Analiza wrażliwości estymacji współczynnika *Beta* ze względu na częstotliwość analizowanych danych, zarówno w przypadku standardowych założeń o rozkładzie składnika losowego jak i w przypadku proponowanych uogólnień.

Postawione w proponowanej koncepcji pytania badawcze służą weryfikacji następujących hipotez. Hipoteza główna rozprawy (H_G) stanowi że:

H_G: Rodziny rozkładów dopuszczających grube ogony i asymetrię wykorzystane w regresji CAPM zmieniają wnioskowanie o współczynniku *Beta* określającym ryzykowność badanych aktywów w porównaniu z wynikami płynącymi z gaussowskiej regresji CAPM.

W celu weryfikacji H_G niezbędna jest weryfikacja następujących hipotez cząstkowych:

H_{c1}: Rodziny rozkładów dopuszczających grube ogony i asymetrię wykorzystane w regresji CAPM zmieniają wnioskowania o współczynniku *Beta* w zależności od częstotliwości analizowanych danych.

H_{c2}: Sektorowe współczynniki *Beta* estymowane za pomocą ICAPM wykazują zróżnicowane dla tych samych branż kwotowanych na różnych giełdach.

4. Przedstawienie źródeł informacji i metod badawczych, prezentacja planowanej procedury badawczej i spodziewanych rezultatów badań

~~n~~ Rodziny rozkładów *t*-Studenta i GED są rozłączne, i jedynie rozkład normalny stanowi ogniwo je łączące; uzyskany granicznie w przypadku rodziny *t*-Studenta i w przypadku rodziny GED jako szczególny przypadek. Interesujące uogólnienie rozkładu *t*-Studenta zaproponowali Zhu i Galbraith (2010), których propozycja pozwala opisać różnicę pomiędzy lewym, a prawym ogonem rozkładu, jak również oddzielnie możliwość skośności.

Ważną pracą jest artykuł Harvey i Lange (2017), w którym autorzy dokonali unifikacji rozłącznych rodzin GED i *t*-Studenta, poprzez zdefiniowanie bogato sparametryzowanej rodziny rozkładów dopuszczających grube ogony (różne lewy i prawy), asymetrię i kształt. Jako szczególne przypadki rodziny rozkładów Harvey i Lange (2017) można rozważyć GED, rozkład normalny czy *t*-Studenta oraz wiele ich wariantów dopuszczających asymetrię~~i~~; na przykład skośny rozkład *t*-Studenta; zob. Fernández i Steel (1998). Mazur i Pipień (2020) zastosowali podejście Harveya i Lange (2017) i opracowali wersję wielowymiarową analizowanej rodziny rozkładów. Uzyskane wyniki empiryczne dowodzą elastyczności w dopasowaniu do rozkładów empirycznych stóp zmian instrumentów finansowych. Opracowane podejście pozwala na modelowanie szeregów czasowych charakteryzujących się wysoką niejednorodnością dotyczącą asymetrii oraz zróżnicowaniem efektu grubości lewego i prawego ogona rozkładu; zob. Mazur i Pipień (2020).

Wszystkie powyższe uogólnienia standardowego rozkładu normalnego, *t*-Studenta czy GED będą przedmiotem analiz pod kątem użyteczności w modelowaniu rozkładu składnika losowego w regresji CAPM (4). Estymacja parametrów z niestandardowymi założeniami przyjętymi dla rozkładu składnika losowego odbywać się będzie z wykorzystaniem Metody Największej Wiarygodności na podstawie samodzielnie opracowanych procedur. Opisanie rozkładu składnika losowego za pomocą niegaussowskich i bogato sparametryzowanych rodzin rozkładów umożliwi dokładniejszą empiryczną weryfikację modelu. W przekonaniu autorki próba opisania rozkładu składnika losowego za pomocą elastycznych rozkładów poszerzy wiedzę o modelu CAPM oraz jego użyteczności w określaniu ryzykowności instrumentów finansowych.

W estymacji parametrów regresji CAPM zostaną wykorzystane dane z rynku kapitałowego polskiego oraz amerykańskiego. Parametry CAPM zostaną oszacowane dla indeksów sektorowych, a nie dla pojedynczych spółek. Taki dobór danych jest przedmiotem wielu analiz; zob. Blume (1970); Friend, Blume (1970); Black, et al., (1972); Johnson, Sakoulis (2008); Korkas (2009). Użycie stóp zwrotu z indeksów sektorowych pozwala osłabić do pewnego stopnia efekt grubych ogonów oraz asymetrii. Ma to poważne konsekwencje dla przyjmowanych założeń stochastycznych oraz estymacji. Stopy zwrotu z portfeli indeksów charakteryzują się większą regularnością aniżeli stopy zwrotu z pojedynczych spółek. Oznacza to, że wartość akcji poszczególnych spółek nie będzie definiować całego sektora, a będzie jego wypadkową. Analizowanie indeksów pozwoli na ocenę ryzykowności danych sektorów gospodarki. Ocena ryzykowności branży jest na przykład istotna przy analizie scoringowej podczas rozpatrywania wniosków o kredyt składanego przez przedsiębiorstwa. Ryzykowność danej branży pozwala również funduszom inwestycyjnym inwestować pieniądze zgodnie ze strategią funduszu. Niektóre branże takie jak produkcja podstawowych towarów (*ang. Consumer Staples*) czy usługi komunalne (*ang. Utilities*) są niewrażliwe na wahania koniunkturalne; zob. Zhongzhi, Kryzanowski (2008). Z kolei branże takie jak motoryzacja (*ang. Automobiles and Components*) czy nieruchomości (*ang. Real Estate*) są bardzo wrażliwe na koniunkturę.

Wykorzystanie danych z rynku kapitałowego z Polski oraz USA pozwoli na porównanie analogicznych branż/działów funkcjonujących w małej gospodarce otwartej, oraz w dużej gospodarce, która jest światowym liderem. Jako portfel rynkowy dla Polski zostanie użyty indeks WIG, który skupia wszystkie spółki notowane na warszawskiej giełdzie. Dla giełdy amerykańskiej portfelem rynkowym będzie indeks SP500. Jako przybliżenie stopy wolnej od ryzyka wykorzystano rentowności 10 letnich obligacji skarbowych Polski i Stanów Zjednoczonych.

5. Bibliografia:

1. Adcock C., Shutes K., (2000), *Fat tails and the Capital Asset Pricing Model*, Advances in Quantitative Asset Management, Kluwer Academic Publishers. (https://doi.org/10.1007/978-1-4615-4389-3).
2. Adcock C., (2004), *Capital Asset Pricing for UK Stocks under the Multivariate Skew-Normal Distribution*, pod redakcją G. Genton, *Skew-Elliptical distributions and their applications. A journey beyond normality*, Champan & Hall CRS.
3. Azzalini A., (1985), *A Class of Distributions Which Includes the Normal Ones*, Scandinavian Journal of Statistics, Vol. 12, No. 2.
4. Azzalini A., (1986), *Further results on a class of distributions which includes the normal ones*, Statisctica, Vol. 46, No. 2. (https://doi.org/10.6092/issn.1973-2201/711).
5. Bao T., Diks C., Li H., (2018), *A generalized CAPM model with asymmetric power distributed errors with an application to portfolio construction*, Economic Modeling, No 68. (https://doi.org/10.1016/j.econmod.2017.03.035).
6. Bai H., Houb K., Kung H., X.N E., Zhang L.,(2019), *The CAPM strikes back? An equilibrium model with disasters*, Journal of Financial Economics, Vol. 131, No. 2. (https://doi.org/10.1016/j.jfineco.2018.08.009).
7. Banz, R., (1981), *The relationship between return and market value of common stocks*, Journal of Financial Economics, Vol. 9, (https://doi.org/10.1016/0304-405X(81)90018-0).
8. Barrucci E., (2003), *Financial Market Theory Equilibrium, Efficiency and Information*, Springer.
9. Basu, S., (1977), *Investment Performance of Common Stocks in Relation to Their Price-Earnings Ratios: A Test of the Efficient Market Hypothesis*, Journal of Finance, Vol. 12, No. 3, (https://doi.org/10.2307/2326304).
10. Basu S., (1983), *The relationship between earnings yield, market value, and return for NYSE common stocks: Further Evidence*, Journal of Financial Economics, Vol. 12, No. 1, (https://doi.org/10.1016/0304-405X(83)90031-4).
11. Berk J., (1997), *Necessary Conditions for the CAPM*, Journal of economic theory, Vol. 73, No. 1, (https://doi.org/10.1006/jeth.1996.2218).
12. Black F., Jensen M., Scholes M., (1972), *The Capital Asset Pricing Model: Some Empirical Tests, in Studies in the Theory of Capital Markets*, Michael C. Jensen, ed. New York: Praeger.

13. Black F., (1972), *Capital Market Equilibrium with Restricted Borrowing*, Journal of Business, Vol. 45 No. 3.
14. Blattberg R., Gonedes N., (1974), *A Comparison of the Stable and Student Distributions as Statistical Models for Stock Prices*, Journal of Business , Vol. 47, No.2, (https://doi.org/10.1142/9789814287067_0003).
15. Blume M.,(1970), *Portfolio Theory: A Step Towards its Practical Application*, Journal of Business, Vol. 43, No. 2, (http://dx.doi.org/10.1086/295262).
16. Blume M., Friend I., (1973), *A New Look at the Capital Asset Pricing Model*, Journal of Finance, Vol. 28, No.1, (https://doi.org/10.2307/2978165).
17. Bollerslev T., (1986), *Generalised Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*, Journal of Econometrics, Vol. 21, No. 3, (https://doi.org/10.1016/0304-4076(86)90063-1).
18. Bollerlev T., Engle R., Woodridge D., (1998), *A Capital Asset Pricing Model with Time Varying Covariances*, Journal of Political Economy, Vol. 98, No. 1. (DOI:10.1086/261527).
19. Breeden D., (1979), *An interteporal asset pricing model with stochastic consumption and investment opportunities*, Journal of Financial Economics, Vol. 7, No. 3, (https://doi.org/10.1016/0304-405X(79)90016-3).
20. Campbell J., (1991), *A variance decomposition for stock returns*, Economic Journal, Vol.101, (https://doi.org/10.2307/2233809).
21. Campbell J., Lo A., MacKinlay, A.C., (1997), *Econometrics of Financial Markets*, Princeton University Press, Princeton, NJ.
22. De Santis G., Gerard B., (1997), *International Asset Pricing and Portfolio Diversification with Time-Varying Risk*, The Journal of Finance, Vol. 52, No.5, (https://doi.org/10.2307/2329468).
23. Dębski W., (2010), *Rynek finansowy i jego mechanizmy – podstawy teorii i praktyki*, PWN, Warszawa.
24. Doman M., Doman R., (2009), *Modelowanie i zmienności ryzyka. Metody Ekonometrii Finansowej*, Oficyna, Kraków.
25. Engle R., (1982), *Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of UK Infiation*, Econometrica, Vol.50, No.4, (https://doi.org/10.2307/1912773).

26. Faff R.W., Hillier D., Hillier J., (2000), *Time varying Beta risk: An analysis of alternative modeling techniques*, Journal of Business Finance & Accounting, Vol. 27, No. 5, (DOI: 10.1111/1468-5957.00324).
27. Fang K., Kotz S., Ng K., (1990), *Symmetric Multivariate and Related Distributions*, Chapman and Hall, New York.
28. Fama E.F., French K., (1992), *The Cross-Section of Expected Stock Returns*, Journal of Finance, Vol. 47 No. 2. (https://doi.org/10.2307/2329112).
29. Fama E.F., French K., (1998), *Value Versus Growth: The International Evidence*, Journal of Finance, Vol. 53 No.6, (http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.2358).
30. Fama E.F., French K., (2004), *The Capital Asset Pricing Model: Theory and Evidence*, Journal of Economic Perspectives, Vol. 18, No. 3, (DOI: 10.1257/0895330042162430).
31. Fama E.F., Schwert G., (1977), *Asset returns and inflation*, Journal of Financial Economics, No. 5, (https://doi.org/10.1016/0304-405X(77)90014-9).
32. Fernández C., Steel M., (1998), *On Bayesian Modeling of Fat Tails and Skewness,* Journal of the American Statistical Association, Vol.93, (DOI:10.1080/01621459.1998.10474117).
33. Fiszeder P., (2009), *Modele klasy GARCH w empirycznych badaniach finansowych*, Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Mikołaja Kopernika, Toruń.
34. Giovannini A., Jorion P., (1989), *The Time Variation of Risk and Return in the Foreign Exchange and Stock Markets*, Journal of Finance Vol.44, No.2, (https://doi.org/10.2307/2328592).
35. Greene W. H., (2012), Econometric Analysis, Pearson.
36. Habibi H., Habibi R., Habibi H., (2016), *Derivation of Kalman Filter Estimates Using Bayesian Theory: Application in Time Varying Beta CAPM Model*, Journal of Statistical and Econometric Methods, Vol.5, No.2.
37. Harvey A., Lange R. J., (2017), Volatility Modeling with a Generalized t-Distribution, Journal of Time Series Analysis Vol. 38, No. 2, (https://doi.org/10.1111/jtsa.12224).
38. Hodrick R., (1992), *Dividend yields and expected stock returns: alternative procedures for inference and measurement*, Review of Financial Studies, Vol. 5, No.3, (https://doi.org/10.1093/rfs/5.3.351).
39. Jagannathan R., Meier I., (2002), *Do we need CAPM for capital budgeting*, NBER Working Paper Series, No. 8719, (https://doi.org/10.2307/3666174).

40. Johnson L., Sakoulis G., (2008), *Maximizing equity market sector predictability in a Bayesian time-varying parameter model*, Computational Statistics & Data Analysis, No. 52, No.6, (https://doi.org/10.1016/j.csda.2007.09.030).
41. Kaplan P., Peterson J., (1998), *Full-Information Industry Betas,* Financial Management, Vol. 27, No. 2. (https://doi.org/10.2307/3666295).
42. Komunjer I., (2007), *Asymmetric power distribution: Theory and applications to risk measurement*, Journal of Applied Economics, Vol. 22, No. 5, (https://doi.org/10.1002/jae.961).
43. Koop G., (2014), *Wprowadzenie do Ekonometrii*, Oficyna, Warszawa.
44. Korkas K., (2009), *Asset Pricing with Dynamic CAPM: An Application to 49 US Industry Portfolios*, Master Thesis, Department of Statistics, London School of Economics, (http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.1733082).
45. Litntner J., (1965), *Security Prices, Risk, And Maximal Gains From Diversification*, The Journal of Finance, Vol. 20, No.4, (https://doi.org/10.2307/2977249).
46. McDonald J., Michelfelder R., Theodossiou P., (2009), *Robust estimation with flexible parametric distributions: estimation of utility stock Betas*, *Robust estimation with flexible parametric distributions: estimation of utility stock Betas*, Quantitative Finance, Vol.10, No.4, (https://doi.org/10.1080/14697680902814241).
47. Mazur B., Pipień M., (2020), *A Family of Flexible Multivariate Distributions with Applications in Empirical Finance*, Acta Physica Polonica A, Vol. 138, (DOI: 10.12693/APhysPolA.138.65).
48. Mazur B., Pipień M., (2018), *Modelling Time Varying Asymmetry and Tail Behaviour in Long Series of Daily Financial Returns*, Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics, Vol. 22 No.5, (https://doi.org/10.1515/snde-2017-0071).
49. Merton R., (1973), *An intertemporal capital asset pricing model*, Econometrica, No.41.
50. Osińska M., (2006), *Ekonometria Finansowa*, Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne.
51. Phuoc L., Kim K., Yingcai S., (2018), *Reexamination of Estimating Betas Coefficient as a Risk Measure in CAPM*, Journal of Asian Finance, Economics and Business, Vol. 5, No.1, (DOI: 10.13106/jafeb.2018.vol5.no1.11).
52. Pipień M., (2013), *Orthogonal transformation of coordinates in Copula M-GARCH Models – Bayesian Analysis for WIG20 spot and futures returns*, NBP Working Papers 151, Narodowy Bank Polski, Poland.
53. Praetz P., (1972), *The Distribution of Share Price Change*, Journal of Business, Vol. 45, No. 1, (https://www.jstor.org/stable/2351598).

54. Ross S., (1978), *The current status of the capital asset pricing model (CAPM)*, The Journal of Finance, Vol. 33, No.3, (https://doi.org/10.2307/2326486).
55. Sharpe W., (1964), *Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk*, The Journal of Finance, Vol. 19, No. 3, (https://doi.org/10.2307/2977928).
56. Stambaugh R., (1982), *On The Exclusion of Assets from Tests of the Two-Parameter Model: A Sensitivity Analysis*, Journal of Financial Economics, Vol. 10, No. 3, (https://doi.org/10.1016/0304-405X(82)90002-2).
57. Theodossiou A., Theodossiou P., (2014), *Stock return outliers and beta estimation: The case of U.S. pharmaceutical companies*, Journal of International Financial Markets, Institutions & Money, Vol. 30, (https://doi.org/10.1016/j.intfin.2014.02.002).
58. Zhongzhi H., Kryzanowski L., (2008), *Dynamic betas for Canadian sector portfolios*, International Review of Financial Analysis, Vol. 18, (https://doi.org/10.1016/j.irfa.2007.08.001).
59. Zhou X.Y., Yin G., (2003), *Markowitz's mean-variance portfolio selection with regime switching: a continuous-time model*, SIAM Journal on Control and Optimization Vol. 42, No.4, (DOI: 10.1137/S0363012902405583).
60. Zhou G., (1993), *Asset-Pricing Tests Under Alternative Distributions*, The Journal of Finance, Vol. 48, No. 5, (https://doi.org/10.2307/2329073).
61. Zhu D., Galbraith J., (2010), *A generalized asymmetric Student-t distribution with application to financial econometrics*, Journal of Econometrics Vol. 157, No. 2, (https://doi.org/10.1016/j.jeconom.2010.01.013).